0,5

Faculté des Sciences et Techniques de Tanger

Département Des Sciences Mathématiques

MIPCI
Semestre I CC_2

Année Universitaire 06-07
Durée 02h

Exercice 1:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par;

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{2\sqrt{x^2+1}} e^{\arctan x}$$

1) Donner les développements limités à l ordre 3 :
   a) de la fonction f au voisinage de 0;
   b) de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x} f(x)$ au voisinage de $+\infty$
   c) de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x} f(x)$ au voisinage de $-\infty$

2) Faire un tableau de variations de f et tracer sa courbe.

Exercice 2:

1.) Calculer les intégrales:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} \quad et \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{3 + \cos x}$$

2.) Etudier la convergence des intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+5} \quad , \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

3.) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\alpha}} \qquad a \in \mathbb{R}^*$$

est-elle convergente?

Exercice 3: Résoudre les équations différentielles suivantes

1.) $y'\sqrt{x} - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0 \quad , \quad x \in [0, +\infty[$

2.) Ecrivez la solution générale de l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = xe^{-x} \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice 1 1/ $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+2}{2\sqrt{x^2+1}} e^{\arctan x}$

1/ a/ $DL_3(0)$: On a $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$; $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o(X^3)$

$e^{\arctan x} = e^{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = 1 + (x - \frac{x^3}{3}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{3})^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{3})^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(2x^2-3x+2)(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3))(1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))$

$= \frac{1}{2}(2 - x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3))$

b/ $g(x) = \frac{1}{x} f(x) = \dfrac{2x^2-3x+2}{2x\sqrt{x^2+1}} e^{\arctan x}$ On pose $X = \frac{1}{x}$; Rappel $\arctan X + \arctan \frac{1}{X} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & X>0 \\ -\frac{\pi}{2} & X<0 \end{cases}$

$= \dfrac{2/X^2 - 3/X + 2}{\frac{2}{X}\sqrt{\frac{1}{X^2}+1}} e^{\arctan \frac{1}{X}} = \dfrac{2X^2-3X+2}{2\sqrt{1+X^2}} e^{\frac{\pi}{2} - \arctan X}$

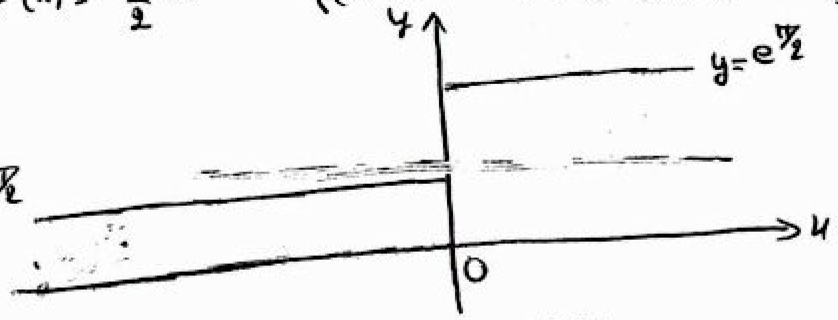
$= \frac{e^{\pi/2}}{2}(2X^2-3X+2)(1-\frac{1}{2}X^2+o(X^2))(1 - X + \frac{X^3}{3} + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{6}X^3 + o(X^3)) = \frac{e^{\pi/2}}{2}\left(2 - \frac{5}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{3x^3} + o(\frac{1}{x^3})\right)$

c/ $g(x) = \frac{1}{x} f(x) = \dfrac{2x^2-3x+2}{2x\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2X^2-3X+2}{2\sqrt{1+X^2}} e^{-\frac{\pi}{2} - \arctan X}$ $(X = \frac{1}{x})$

$= \frac{e^{-\pi/2}}{2}(2X^2-3X+2)(1-\frac{1}{2}X^2+o(X^2))(1 - X + \frac{X^3}{3} + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{6}X^3 + o(X^3)) = \frac{e^{-\pi/2}}{2}\left(2 - \frac{5}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{3x^3} + o(\frac{1}{x^3})\right)$

2/ $f'(x) = \frac{1}{2} e^{\arctan x} \left((x+1)(2x^2-1)\right) / (x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$



D_1 : $y = e^{\pi/2}$ A.O en $+\infty$

D_2 : $y = e^{-\pi/2}$. A.O en $-\infty$

Exercice 3 1/ (E) : $y'\sqrt{x} - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$

on pose $u = \sqrt{y}$ càd $y = u^2$; $y' = 2uu'$

· l'eq devient (F) : $2uu'\sqrt{x} - u^2 + (x + 2\sqrt{x})u = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $2u'\sqrt{x} - u = -x - 2\sqrt{x}$

· (F') : $2u'\sqrt{x} - u = 0 \rightarrow \frac{u'}{u} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \ln|u| = \sqrt{x} + K \Rightarrow u_1 = Ce^{\sqrt{x}}$ sol de (F')

· Determinons u_0 sous la forme $u_0 = Ce^{\sqrt{x}}$, equation particulière de (F)

$u_0' = C'e^{\sqrt{x}} + C \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$; $2u_0'\sqrt{x} - u_0 = -x - 2\sqrt{x} \Rightarrow 2C'\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} = -x - 2\sqrt{x}$

$\Rightarrow C' = \dfrac{-x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{x}+1)e^{-\sqrt{x}} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}\int(\sqrt{x}+1)e^{-\sqrt{x}}dx$

On pose $t = \sqrt{x}$ càd $x = t^2$, $dx = 2t\,dt \Rightarrow C = -\frac{1}{2}\int(t+1)e^{-t}(2t)\,dt$

$C = -\int(t^2+t)e^{-t}dt$ (on intègre 2 fois et on trouve) $C = (x + 2\sqrt{x} + 3)e^{-\sqrt{x}}$

d'où $u_0 = x + 2\sqrt{x} + 3$ et $u = x + 2\sqrt{x} + 3 + Ce^{\sqrt{x}} \Rightarrow y = (x + 2\sqrt{x} + 3 + Ce^{\sqrt{x}})^2$

2/ (E) : $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ • ; (E') : $y'' + 2y' + y = 0$; $r^2 + 2r + 1 = 0$; $\Delta = 0$, $r = -1$

$y_1 = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ sol de (E')

• La solution particulière de (E) est de la forme $y_0 = x^2(ax+b)e^{-x}$ car $r = -1$ racine double

de l'eq caractéristique : $y_0'' + 2y_0' + y_0 = xe^{-x} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{6}x^3e^{-x} \Rightarrow y = \frac{1}{6}x^3e^{-x} + (\alpha x + \beta)e^{-x}$

$b = 0$

Exercice 2

1/ $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-x}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x+1}\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \text{Arctan}\, x + \ln|x+1|\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} + \ln 2\right) = \frac{\pi + 2\ln 2}{8}$

$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3+\cos x}\, dx = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3+\cos x}\, dx \qquad \left(x \longmapsto \frac{\sin^2 x}{3+\cos x} \text{ est paire}\right)$

$= 2.\int_0^{\pi} \frac{1-\cos^2 x}{3+\cos x}\, dx = 2\int_0^{\pi} 3-\cos x - \frac{8}{3+\cos x}\, dx \qquad \frac{1-X^2}{X+3} = -X+3-\frac{8}{3+X}$

$= 2\int_0^{\pi} 3-\cos x\, dx - 16.\int_0^{\pi} \frac{1}{3+\cos x}\, dx = 2\left[3x - \sin x\right]_0^{\pi} - 16K = 6\pi - 16K$

$K = \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\cos x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$

On pose $t = \text{tg}\, x/2 \Rightarrow dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\, dx$

si $x = 0$ alors $t = 0$

si $x = \pi/2$ alors $t = +\infty$

$= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+2t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2}\, dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

d'où $J = 6\pi - 4\pi\sqrt{2}$

2/a/ On a : $|I_1| = \left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\, dx\right| \leq \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$

on a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$ c.v donc I_1 converge $\quad (\alpha = 3/2 > 1)$

b/ $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\text{Arctan}\frac{x}{\sqrt{5}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \Rightarrow I_2$ c.v

c/ $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1}\, dx = \left[\text{Arctan}(x+1)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi \Rightarrow I_3$ c.v

3/ $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}\, dx$

- la fonction $x \longmapsto \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}$ est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}\, dx$ c.v
- Au voisinage de $+\infty$: $x^2+a^2 \sim x^2 \Rightarrow \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha} \sim \frac{1}{x^{2\alpha}}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}}\, dx$ c.v $\Leftrightarrow 2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1/2$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}\, dx$ c.v si et ssi $\alpha > 1/2$

Ainsi I_n c.v $\Leftrightarrow \alpha > 1/2$